Note om SIR-modellen

af Niels Jensen

Noten er oprindeligt udarbejdet til undervisningsbrug i egne klasser. Den tager udgangspunkt i beskrivelsen af SIR-modellen i "Matematik i virkeligheden" af Allan Baktoft, og undersøger egenskaber ved modellen vha. programmet Maple 2020. Beskrivelsen af modellen vha. SD-diagrammer, er inspireret af "Hvad er matematik B?" af Bjørn Grøn m.fl.

Indledning:

Epidemier har i tidens løb kostet millioner af mennesker livet. Det er derfor af stor betydning, hvis man kan opstille præcise matematiske modeller til at beskrive og forudsige, hvordan en epidemi udbreder sig i en befolkning. Vi skal i det følgende arbejde med den såkaldte SIR- model.

Overblik over SIR-modellen:

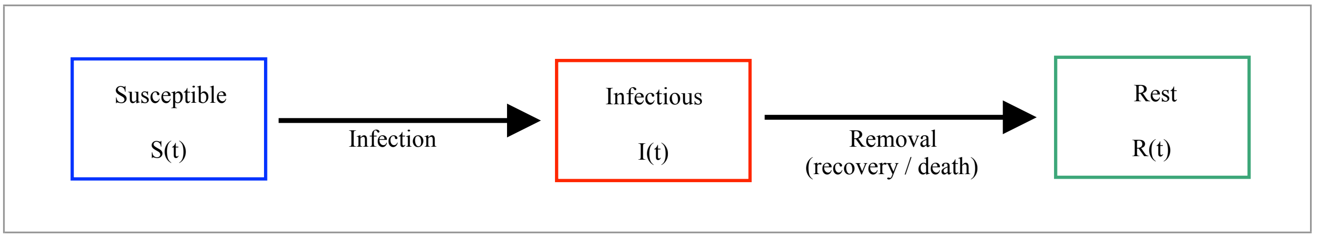
SIR-modellen hedder også *Kermack og Mckendricks compartment model* efter de to skotter, der foreslog den i 1927. Compartment (= rum, aflukke) refererer til at man i modellen opdeler en population (befolkning) i tre grupper:

S: Susceptible	Individer der er modtagelige og kan smittes med sygdommen.
I: Infectious	Individer, der selv er smittet med sygdommen og som kan smitte andre.
R: Rest	Individer som ikke kan smittes og som heller ikke smitter andre. Dette vil typisk være individer som har overstået sygdommen og som derved er blevet immune. Men det kan også være individer som dør af sygdommen, eller individer som var immune fra begyndelsen.

Hvis populationens samlede størrelse er N individer gælder der at $N = S + I + R$

Ideen med modellen er at beskrive et flow mellem grupperne svarende til et sygdomsforløb, hvor individerne først er raske, så syge (og smittende) og endelig friske igen eller døde:

SIR-model



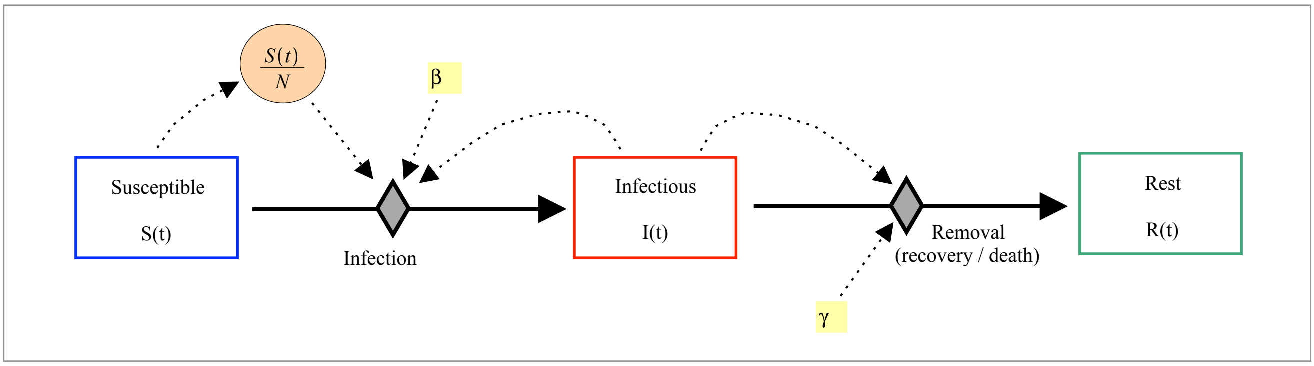
Der er altså to processer på spil, som er det der skaber et "flow" af individer mellem kasserne i modellen. **Infection** er den proces hvorved modtagelige individer bliver smittet med sygdommen og dermed "flyttes" fra gruppen S til gruppen I. **Removal** er den proces hvorved smitsomme individer holder op med at være syge (man bliver rask eller dør), og dermed "flyttes" fra gruppen I til gruppen R.

I den forsimplede udgave af SIR-modellen som vi arbejder med her, antages det at sygdommen forløber i et lukket miljø. Dvs. der flytter ingen individer ind eller ud af populationen, der bliver ikke født nogen, og der dør ikke nogen (af andet end sygdommen). Dvs. N er konstant.

Detaljerne i SIR-modellen:

SIR-modellen kan illustreres i et SD-diagram på følgende måde:

SIR-model



Ud fra SD-diagrammet kan følgende differentialligninger aflæses:

$$S'(t) = -\frac{S(t)}{N} \cdot \beta \cdot I(t)$$

$$I'(t) = \frac{S(t)}{N} \cdot \beta \cdot I(t) - \gamma \cdot I(t)$$

$$R'(t) = \gamma \cdot I(t)$$

ØVELSE 1: Forklar selv ud fra SD-diagrammet, hvordan de tre ligninger kan aflæses fra diagrammet.

Men hvad betyder disse ligninger egentlig og hvordan skal de fortolkes i forhold til virkeligheden? Det vil vi nu kigge nærmere på.

Lad os først kigge på flowet af individer fra I til R, dvs. den proces i modellen som kaldes **removal.** Her er der to stiplede informationspile som peger hen mod flowets "hane" og dermed afgør hvor mange individer der hver dag holder op med at være syge og smitsomme:

γ	Tallet *gamma* kaldes for **removal rate** og angiver den andel af gruppen af smittede (I) som hver dag flyttes til restgruppen (R). *Ex: Hvis* $\gamma = 0.12$ *vil der hver dag være 12% af de syge som holder op med at være syge.* Hvis vi kalder sygdomsforløbets gennemsnitlige længde for T, så gælder der at $$\gamma = \frac{1}{T}$$ Hvis sygdomsperioden f.eks. er 5 dage i gennemsnit kan removal rate (γ) beregnes til at være $$\gamma = \frac{1}{5} = 0.2$$ Dvs. hvis sygdommen varer fem dage vil der dagligt være 20% af de smittede (I) som flyttes til gruppen af immune (R) .
$I(t)$	Antallet af syge (og smitsomme) individer. Hvis der er få som er syge er der også hver dag kun nogle få som bliver raske (eller dør). Hvis der er mange som er syge er der også hver dag mange som bliver raske (eller dør).

ØVELSE 2:

a: Beregn værdien af γ hvis sygdomsperioden er 13 dage.

b: En sygdom har en γ på 0.2365. Hvad er den gennemsnitlige sygdomsperiode?

Lad os nu kigge på **infektionsprocessen**, dvs. flowet af individer fra S til I. Af de tre stiplede informationspile som peger hen mod "hanen" ses det at flowets størrelse (dvs. hvor mange der bliver smittede per dag) afhænger af tre faktorer:

$\frac{S(t)}{N}$	Denne brøk angiver andelen af modtagelige i forhold til den samlede befolkning. Hvis der er en stor andel af modtagelige vil det være lettere for sygdommen at spredes. Hvis der er en lille andel af modtagelige vil det være sværere for sygdommen at spredes.
$I(t)$	Antallet af smitsomme individer. Hvis der er få som er smittede er der også få til at sprede sygdommen. Hvis der er mange som er smittede er der også mange til at sprede sygdommen.
β	Tallet *beta* kaldes **kontaktraten** og angiver det antal raske personer som en enkelt smittet person i gennemsnit vil smitte på en enkelt dag (i en befolkning uden immunitet). *Ex: Hvis $\beta = 0.18$ vil hver smittet person selv smitte 0.18 raske personer per dag. Eller sagt på en anden måde: 100 smittede personer vil tilsammen smitte 18 raske personer per dag.* Størrelsen af β afhænger i praksis af mange forskellige ting: - hvordan smitter sygdommen? (kan den spredes gennem luften, eller skal man røre hinanden?) - hvor smitsom er sygdommen? (er det let eller svært at blive smittet?) - hvor stor kontakt har man med andre individer? (har man mange eller få fysiske kontakter med andre i løbet af en dag?) - hvor fornuftigt opfører man sig? (er man forsigtig ift. at hindre smittespredning eller opfører man sig risikabelt?)

Sammenhængen mellem β og det grundlæggende reproduktionstal R_0:

Det grundlæggende reproduktionstal R_0 (kaldes også for smittetrykket) angiver det samlede antal mennesker, som hver smittet bærer smitten videre til i løbet af hele sin sygdomsperiode (i en befolkning uden immunitet). Der gælder at

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$$

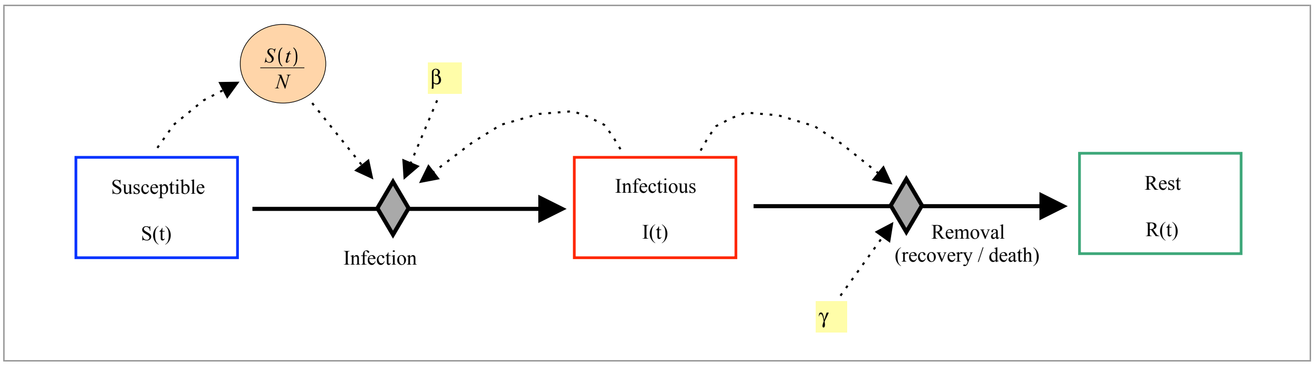
Hvis smitteperioden f.eks. er 11 dage i gennemsnit, og smittetrykket er på 4.2 kan kontaktraten (β) beregnes til at være

$$4.2 = \frac{\beta}{\left(\frac{1}{11}\right)} \xrightarrow{\text{solve}} \{\beta = 0.3818181818\}$$

Dvs. hver smittet person vil dagligt i gennemsnit smitte ca. 0.38 raske personer.

ØVELSE 3:
For en sygdom med en gennemsnitlig sygdomsperiode på 13 dage gælder det, at hver person i gennemsnit når at smitte tre andre personer i løbet af sin sygdomsperiode. Beregn værdien af β og fortolk resultatet.

Opsummering af SIR-modellen:



$$S'(t) = -\frac{S(t)}{N} \cdot \beta \cdot I(t)$$

$$I'(t) = \frac{S(t)}{N} \cdot \beta \cdot I(t) - \gamma \cdot I(t)$$

$$R'(t) = \gamma \cdot I(t)$$

Modellens variable:

t	Antal dage efter epidemiens start.
$S(t)$	Antal raske (som kan smittes med sygdommen) til tiden t.
$I(t)$	Antal smittede (som kan smitte andre) til tiden t.
$R(t)$	Antal som ikke kan smittes (fordi de er immune eller døde) til tiden t.

Der gælder således at den samlede population er: $N = S + I + R$

Modellens parametre:

γ	Removal rate: den andel af gruppen af smittede (I) som hver dag flyttes til gruppen af helbredte (R). *Ex: Hvis* $\gamma = 0.12$ *vil der hver dag være 12% af de syge som bliver helbredt.*
β	Contact rate: det antal raske personer som en enkelt smittet person i gennemsnit vil smitte på en enkelt dag (i en befolkning uden immunitet). *Ex: Hvis* $\beta = 0.18$ *vil hver smittet person selv smitte 0.18 raske personer per dag. Eller sagt på en anden måde: 100 smittede personer vil tilsammen smitte 18 raske personer per dag.*

Modellens hjælpefunktioner:

$\frac{S(t)}{N}$	Angiver hvor stor en andel af befolkningen som er modtagelig for sygdommen. Ved epidemiens start vil andelen være meget tæt på 1 (med mindre der er individer som fra starten har immunitet mod sygdommen). Efterhånden som epidemien forløber vil andelen af modtagelige falde.

Simulering af epidemi vha. Maple

Vi skal nu undersøge hvad der sker i en population på 100000 individer, hvoraf 50 er smittede ved epidemiens start og ingen er immune.

Dvs. begyndelsesbetingelserne er

$S(0) = 99950$
$I(0) = 50$
$R(0) = 0$

og $N = 100000$

Som parametre anvender vi nogle af de værdier som blev brugt i eksemplerne på forrige side.

$\beta = 0.3818$
$\gamma = \frac{1}{5}$

Vores differentialligninger ser dermed således ud:

$$S'(t) = -\frac{S(t)}{100000} \cdot 0.3818 \cdot I(t)$$

$$I'(t) = \frac{S(t)}{100000} \cdot 0.3818 \cdot I(t) - \frac{1}{5} \cdot I(t)$$

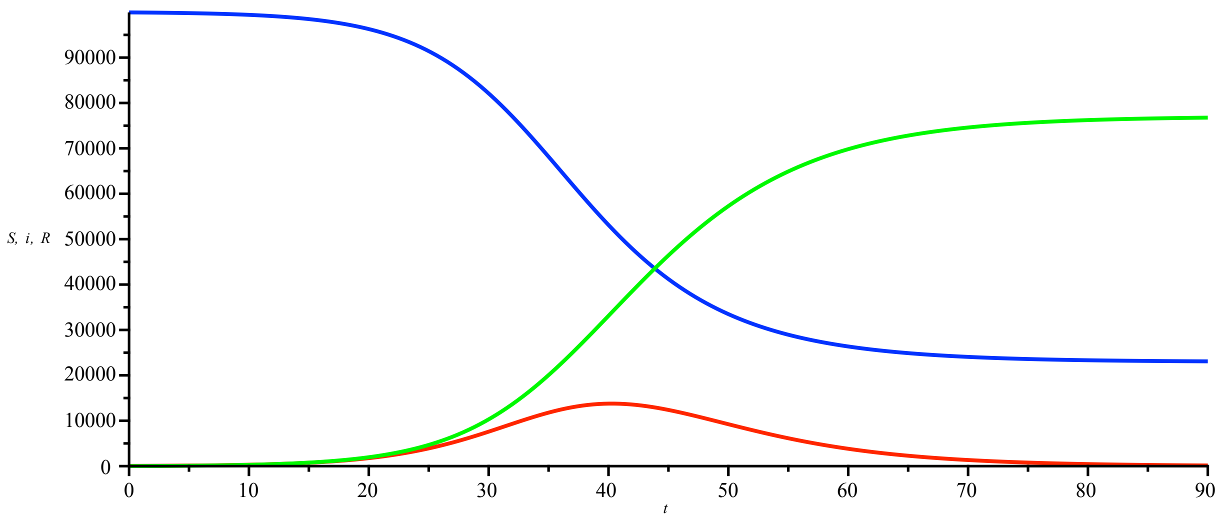
$$R'(t) = \frac{1}{5} \cdot I(t)$$

ØVELSE 4:
Kig på Maplekoden herunder:
Hvor kan man se de tre differentialligninger og de tre begyndelsesbetingelser i koden?
Hvilke farver anvendes til hver af variablene S(t), I(t) og R(t)?
Hvor kan man se hvor langt modellen skal fremskrives?

$$SIReksempel1 := dsolve\left(\left[diff(S(t), t) = -0.3818 \cdot i(t) \cdot \frac{S(t)}{100000}, diff(i(t), t) = 0.3818 \cdot i(t) \cdot \frac{S(t)}{100000} - \frac{1}{5} \cdot i(t), diff(R(t), t) = \frac{1}{5} \cdot i(t), S(0) = 99950, i(0) = 50, R(0) = 0\right], numeric\right);$$

$plots[odeplot](SIReksempel1, [[t, S(t), color = blue], [t, i(t), color = red], [t, R(t), color = green]], 0..90);$

$$SIReksempel1 := \mathbf{proc}(x\_rkf45) \ \ldots \ \mathbf{end\ proc}$$



ØVELSE 5: Hvordan skal disse grafer fortolkes?